

plitud de cada uno de los ángulos.

26. A un alumno se le dice un número y se le pide que haga las siguientes operaciones: "súmale 1, réstale 4 y multiplica los resultados". Se equivoca y procede del siguiente modo: le resta 1, le suma 4 y multiplica los resultados. Sin embargo, obtiene la misma solución que si no se hubiera equivocado. ¿Qué número se le dijo?
27. En un tonel hay agua. Se saca primero la tercera parte del total y luego la quinta parte de lo que le quedaba y aún quedan 16 litros. ¿Cuántos litros había al principio?
28. El año en que nació Lope de Vega (siglo XVI), está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 14, siendo la cifra de las decenas el triplo que la de las unidades. ¿En qué año nació Lope de Vega?
29. El año en que nació Miguel de Cervantes (siglo XVI), está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 17 y la cifra de las unidades de ese número excede en 3 a la de las decenas. ¿En qué año nació Cervantes?
30. Un triángulo tiene 3,0 m más de altura que de base y su área es 20 m^2 . Halla su base y su altura.
31. Un rectángulo tiene 6,0 m más de largo que de ancho; si su área es de 16 m^2 . ¿Cuál es su perímetro?
32. En un terreno rectangular, el largo es el doble del ancho. Si el largo se aumenta en 40 m y el ancho en 6,0 m el área se duplica. Halla las dimensiones del terreno.
33. Encuentra tres números consecutivos, sabiendo que el cociente que resulta al dividir su producto por su suma es 5.
34. El cociente que resulta al dividir 84 por cierto número excede en 5 a este número. Halla el número.

35. Encuentra cinco números consecutivos para los cuales se cumple que la suma de los cuadrados de los tres primeros sea igual a la suma de los cuadrados de los restantes.
36. La diferencia entre el valor numérico del perímetro y el área de un cuadrado es 3, siendo el área el número menor. Halla la longitud del lado del cuadrado.
37. Se quiere construir un cilindro tal que su diámetro sea $\frac{2}{3}$ de la altura y tenga un volumen de $15,7 \text{ dm}^3$. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro?
38. Demuestra que la suma de las dos raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $-\frac{b}{a}$ y su producto es $\frac{c}{a}$.
39. Halla el área del triángulo ABC rectángulo en C, cuyas longitudes de sus catetos x e y cumplen:
- $$\frac{x-2}{x^2+8x+7} = \frac{2x-5}{x^2-49} - \frac{x-2}{x^2-6x-7} ; \quad \frac{y}{y-2} - \frac{2y-1}{y^2+2y} = \frac{y^2+3}{y^2-4y}$$
40. En un edificio de apartamentos se necesitan hacer unos arreglos. El costo promedio es de \$ 200; los vecinos de 8 aptos no pueden colaborar. Prescindiendo de esos 8, el costo es de \$ 250 por cada uno. ¿Cuántos apartamentos hay?, ¿cuánto cuesta la obra?
41. El denominador de una fracción es 5 unidades mayor que el numerador. Si el denominador se aumenta en 7 unidades, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción original?
42. En los Juegos Panamericanos celebrados en 1987, un atleta recorrió 72 km en un cierto tiempo. Si hubiera ido a 3km/h más, hubiera tardado 2 horas menos. ¿Cuál fue su velocidad?
43. Un depósito se puede llenar en $33\frac{1}{5}$ minutos por dos llaves abiertas simultáneamente. Si una de las llaves, trabajando sola, tarda 15 minutos más que la otra en llenar el depósito, ¿cuánto tiempo tardará cada una de las llaves, por separado, en llenar el depósito?

44. Halla dos números cuya suma sea 60 de tal manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.
45. Descompón un número positivo dado (x) en dos sumandos de tal forma que su producto sea el mayor posible.
46. Se desea construir una caja abierta en forma de ortoedro de base cuadrada y con una capacidad de 108 L. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que tenga una superficie mínima?

4. Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones que has estudiado son lineales o cuadráticos.

- Los sistemas lineales (de 2 ó 3 ecuaciones lineales) se resuelven transformándolos en una ecuación lineal en una sola variable, eliminando una de las variables y utilizando, por lo general, el método de sustitución o el de adición y sustracción (reducción).

El significado geométrico de resolver un sistema de dos (tres) ecuaciones lineales es el de buscar los puntos de intersección, si existen, de las rectas (planos) representadas por sus ecuaciones. Cuando el sistema no tiene solución, no existen puntos de intersección.

- Los sistemas cuadráticos en dos variables se resuelven transformándolos en una ecuación cuadrática en una sola variable, eliminando una de ellas. Se utiliza, por lo general, el método de sustitución.

El significado geométrico de resolver un sistema cuadrático es el de buscar los puntos de intersección, si existen, de las curvas representadas por sus ecuaciones. Cuando el sistema no tiene solución, no existen puntos de intersección.

Ejemplo 1

Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -6x - 9y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 3x + 6y = -15 \end{cases}$$

Resolución

Son sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables.

a) A modo de ejemplo resolvamos este inciso por ambos métodos de resolución.

● Aplicando el método de reducción.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} -4x + 2y = -8 & \text{multiplicando (1) por -2 para cancelar} & \\ x - 2y = -1 & \text{la variable } y & \\ \hline -3x & = & -9 \end{array}$$

$$x = 3$$

Sustituyendo $x = 3$ en (2):

$$3 - 2y = -1$$

$$-2y = -4$$

$$y = 2$$

La solución es: $x = 3$; $y = 2$.

● Aplicando el método de sustitución.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

despejando x en (2) tenemos: $x = 2y - 1$ (3)

sustituyendo (3) en (1) se tiene:

$$2(2y - 1) - y = 4$$

$$4y - 2 - y = 4$$

$$3y = 6$$

$$y = 2$$

sustituyendo $y = 2$ en (3) tenemos:

$$x = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

la solución es: $x = 3$; $y = 2$.

Gráficamente tendremos (fig. 3):

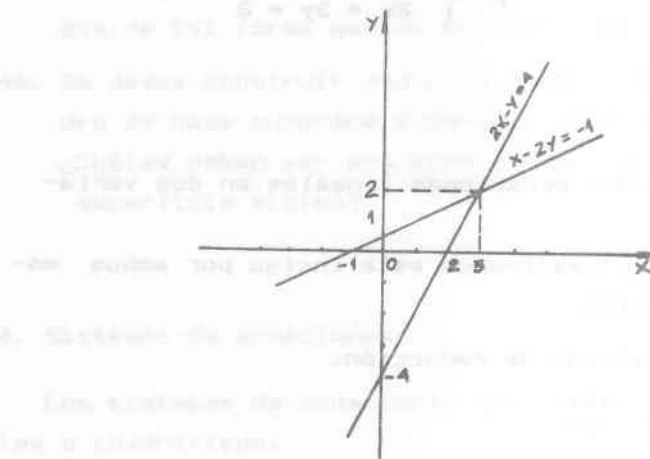


Fig. 3

Las rectas se intersecan en el punto (3;2) pues la solución del sistema es única.

Observa que las pendientes son diferentes, además, los cocientes de los coeficientes de las variables correspondientes son desiguales.

Para controlar tu trabajo puedes comprobar la solución hallada en ambas ecuaciones.

$$b) \begin{cases} -6x - 9y = 3 & (1) \\ 2x + 3y = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} -2x - 3y = 1 & \text{dividiendo (1) por 3 para eliminar} & \\ 2x + 3y = 2 & \text{la variable } x & \end{array}$$

$$0 = 3 \quad \text{Esta igualdad equivale a } 0y = 3 \text{ y no existe ningún número real que la satisfaga.}$$

Este sistema no tiene solución, luego, no existen puntos de intersección entre las rectas correspondientes.

Gráficamente tenemos (fig. 4):

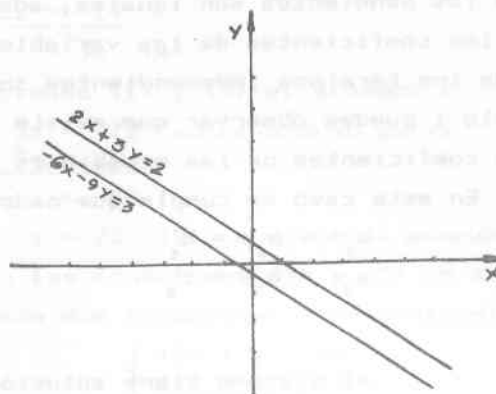


Fig. 4

Las rectas son paralelas, no hay puntos de intersección. Observa que las pendientes de estas rectas son iguales, además, los cocientes de los coeficientes de las variables correspondientes son iguales y desigual al de los términos independientes.

$$c) \begin{cases} x + 2y = -5 & (1) \\ 3x + 6y = -15 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} -3x - 6y & = & 15 \\ 3x + 6y & = & -15 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{multiplicando (1) por -3 para eliminar} \\ \text{la variable } x \end{array}$$

$0 = 0$ Esta igualdad significa $0y = 0$ que se satisface para todo $y \in \mathbb{R}$

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones.

Gráficamente tenemos (fig. 5):

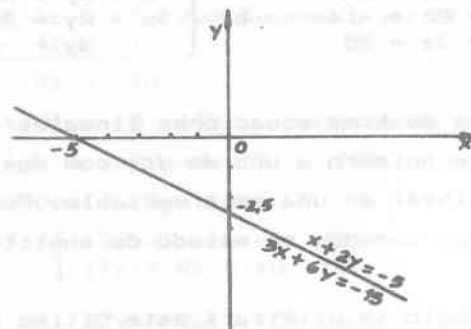


Fig. 5

Las rectas son coincidentes, hay infinitos puntos comunes.

Observa que las pendientes son iguales, además, los coeficientes de los coeficientes de las variables correspondientes y de los términos independientes son iguales. ■

En el ejemplo 1 puedes observar que existe una relación entre los coeficientes de las ecuaciones del sistema y su solución. En este caso se cumple que dado el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

entonces si:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

el sistema tiene solución única (rectas que se cortan).

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

el sistema no tiene solución (rectas paralelas).

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

el sistema tiene infinitas soluciones (rectas coincidentes).

Al intersecarse tres planos en el espacio, el sistema que se forma es lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual se resuelve reduciéndolo a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas aplicando el método de reducción o el método de sustitución.

Ejemplo 2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 5x - 2y + z = 24 \\ 2x + 5y - 2z = -14 \\ x - 4y + 3z = 26 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 5y + 2z = 3 \\ 3x - 2y - 3z = -1 \\ 3y - z = -6 \end{cases}$$

Resolución

Son sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables. Se reduce primero a uno de dos con dos y después a una ecuación lineal en una sola variable. Puedes utilizar, según te sea más cómodo, el método de sustitución o el de reducción.

En este ejemplo se utilizará este último método.

$$a) \begin{cases} 5x - 2y + z = 24 & (1) \\ 2x + 5y - 2z = -14 & (2) \\ x - 4y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$$

De las ecuaciones (1) y (2) eliminemos la variable z :

$$\begin{array}{rcl} 10x - 4y + 2z & = & 48 \\ 2x + 5y - 2z & = & -14 \end{array} \quad \text{multiplicando la ecuación (1) por 2}$$

$$12x + y = 34 \quad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (3) eliminemos z

$$\begin{array}{rcl} -15x + 6y - 3z & = & -72 \\ x - 4y + 3z & = & 26 \end{array} \quad \text{multiplicando (1) por -3}$$

$$-14x + 2y = -46$$

$$7x - y = 23 \quad (5) \quad \text{dividiendo la ecuación por -2}$$

Formemos con las ecuaciones (4) y (5) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y resolvámoslo.

$$\begin{cases} 12x + y = 34 \\ 7x - y = 23 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 12x + y & = & 34 \\ 7x - y & = & 23 \\ \hline 19x & = & 57 \\ x & = & 3 \end{array}$$

Sustituyendo $x = 3$ en (4):

$$\begin{array}{rcl} 36 + y & = & 34 \\ y & = & -2 \end{array}$$

Sustituyendo $x = 3$; $y = -2$ en (1):

$$\begin{array}{rcl} 15 + 4 + z & = & 24 \\ 19 + z & = & 24 \\ z & = & 5 \end{array}$$

La solución es: $x = 3$; $y = -2$; $z = 5$.

$$b) \begin{cases} x + 5y + 2z = 3 & (1) \\ 3x - 2y - 3z = -1 & (2) \\ 3y - z = -6 & (3) \end{cases}$$

Simultaneando las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\begin{array}{rcl} -3x - 15y - 6z & = & -9 \\ 3x - 2y - 3z & = & -1 \end{array} \quad \text{multiplicando (1) por -3}$$

$$-17y - 9z = -10$$

$$17y + 9z = 10 \quad (4) \quad \text{multiplicando por -1}$$

Formemos con las ecuaciones (3) y (4) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3y - z = -6 & (3) \\ 17y + 9z = 10 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 27y - 9z & = & -54 \\ 17y + 9z & = & 10 \end{array} \quad \text{multiplicando por 9}$$

$$44y = -44$$

$$y = -1$$

Sustituyendo $y = -1$ en (3):

$$-3 - z = -6$$

$$z = 3$$

Sustituyendo $y = -1$; $z = 3$ en (1):

$$x - 5 + 6 = 3$$

$$x = 2$$

La solución es: $x = 2$; $y = -1$; $z = 3$. ■

Ejemplo 3

Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^2 = 2(y+1) \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 = 4y \\ 2y^2 = x \end{cases}$$

Resolución

Son sistemas cuadráticos por lo que es conveniente utilizar el método de sustitución.

$$a) \begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 & (1) \text{ ecuación de una circunferencia} \\ & \text{(punto 27 del Memento).} \\ x - y + 3 = 0 & (2) \text{ ecuación de una recta} \\ & \text{(punto 27 del Memento).} \end{cases}$$

Despejemos la variable y en la ecuación (2):

$$y = x + 3 \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (1):

$$(x+3)^2 + (x+3)^2 = 9$$

$$2(x+3)^2 = 9$$

$$2x^2 + 12x + 18 = 9$$

$$2x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 72}}{4} = \frac{-12 \pm \sqrt{72}}{4} = \frac{-12 \pm 6\sqrt{2}}{4}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$x_1 = -3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} = -3 + 1,5 \cdot 1,4 = -3 + 2,1 = -0,9$$

$$x_2 = -3 - 2,1 = -5,1$$

Sustituyendo $x_1 = -0,9$ en (3) se tiene:

$$y_1 = -0,9 + 3 = 2,1$$

Sustituyendo $x_2 = -5,1$ en (3) se tiene:

$$y_2 = -5,1 + 3 = -2,1$$

Las soluciones son: $(-0,9; 2,1)$ y $(-5,1; -2,1)$.

Gráficamente tenemos: (fig. 6)

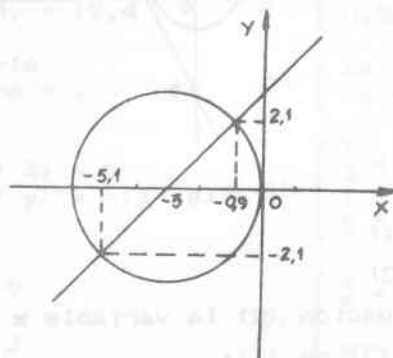


Fig. 6

$$b) \begin{cases} x^2 = 2(y + 1) & (1) \text{ ecuación de una parábola} \\ 2x - y - 3 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{(punto 27 del Memento)}$$

Despejemos la variable y en la ecuación (2):

$$y = 2x - 3 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$x^2 = 2(2x - 3 + 1)$$

$$x^2 = 2(2x - 2)$$

$$x^2 = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Sustituyendo $x = 2$ en (3)

$$y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

La solución es: $(2; 1)$

Gráficamente tenemos (fig. 7):